

河川における非定常流下での砂州形成に関する研究

Study on Bar Formation under Unsteady Flow Conditions in Rivers

大山 史晃* 渡邊 康玄**

Fumiaki OOOYAMA and Yasuharu WATANABE

河床に形成される砂州は、流れを蛇行させ水衝部や局所的な水深規模の深掘れや堆積を生じさせるため、その発生形態は災害と密接に関係してくる。砂州が形成される河川の河床・河道形状を定量的に把握することは河川工学上重要な課題である。また、近年増加している集中豪雨による洪水は、時間的な水位の変化が大きく、洪水時の砂州の挙動を把握しようとする場合、流れの非定常性を考慮する必要があると考えられる。本研究では、2つの河川において、洪水の際に発生した河床の大規模な洗掘と堆積による被災の原因について検証を行った。その結果、被災の原因は、洪水時に砂州が発生したことによるものと判断されたため、渡邊ら¹⁾の非定常流下の線形安定解析法を用いて、洪水時における砂州の挙動を捉え、砂州の形成が河道に及ぼした影響について考察した。また、洪水時浮遊砂が卓越する河川を例にあげ、浮遊砂の発生が砂州の形成にどのような影響を及ぼすのかを把握するため、その影響を考慮しての線形安定解析を実施した。

《キーワード：洗掘；堆積；浮遊砂；非定常流；単列砂州；複列砂州；安定解析》

Sandbars make meandering of flow and cause the local scouring and deposition on river beds. The sandbars formed on riverbeds are closely related to river disasters. It is very important subject on river management works to understand the bed variation caused by the sand bars. The flood by the local heavy rainfall, which is increasing in recent years, has a large variation of water level with time. In order to understand the behavior of sandbars during flood, it is necessary to take the unsteadiness of flow into consideration. In this study, the cause of the disaster by the scouring and deposition, which were caused in two rivers at the time of floods, was verified using linear stability analysis under unsteady flow conditions. In the downstream of rivers, not only a bed load but suspended load has effect upon the formation of bars. In order to understand the influence of suspended load on bar formation under unsteady flow conditions, the linear stability analysis was conducted and the river where suspended load surpasses bed load at the flood was mentioned as the example. When considering the disasters by bar formation during floods, it is necessary to take the unsteadiness of flood into consideration. Furthermore, investigation which also takes in the influence of suspended load on bar formations is required in the river in which suspended load excels.

Key Words : *Scouring, Deposition, Suspended load, Unsteady Flow, Alternate Bar, Double-row Bars, Stability Analysis*

1. はじめに

河床に形成される砂州は、流れを蛇行させ水衝部や局所的な水深規模の深掘れや堆積を生じさせるため、その発生形態は災害と密接に関係してくる。砂州が形成される河川の河床・河道形状を定量的に把握することは河川工学上重要な課題であり、今日まで様々な研究が行われ、砂州の特性等がかなり明らかになってきている。しかし、これらの研究の多くは流れを定常流として砂州の挙動を把握したものであり、時間的に流れが大きく変化する洪水時の挙動把握は、流れの変化の速度に比較して砂州の形成時間が極めて長い非定常流による影響は大きくないとの理由から行われてこなかった。しかし、近年増加している集中豪雨による洪水は、時間的な水位の変化が大きく洪水時の砂州の挙動を把握しようとする場合、流れの非定常性を考慮する必要があると考えられる。

一級河川石狩川の支川である豊平川において、昭和56年8月に発生した大規模な洪水の際に、低水路が完全に埋塞するほどの土砂堆積が生じた。一方、一級河川渚滑川において1998年9月に発生した計画高水位に達する規模の洪水の際にも、高水敷に低水護岸の破壊を引き起こした規模の大きな洗掘が生じた。本研究では、2つの河川における被災を現地調査の結果を把握した上で、渡邊ら¹⁾の非定常流下の線形安定解析法を用いて洪水時における砂州の挙動を捉え、被災と砂州の関係について考察を行った。

また洪水時において浮遊砂が多く卓越する河川を例にあげ、多量な浮遊砂の発生が砂州の形成にどのような影響を及ぼすのかを把握するため、浮遊砂の影響を考慮した線形安定解析を実施した。

2. 検討対象洪水の概要

2.1 豊平川における低水路の土砂堆積

豊平川は、北方随一の都市である札幌市を貫流する流域面積902.3km²、流路延長72.5km、河床勾配1/150～1/3,400を有する一級河川である。とくに市内中心部を流れる中流部までは、都市河川として全国的にもまれな急流河川で、大規模な出水があった時には激しい水流や土砂移動などによって氾濫の危険性が高まる。図-1に豊平川の概要図を示している。昭和56年8月、豊平川流域は2度の豪雨に見舞われ、土砂流出による災害が発生した。とくに8月21～23日の15号台風による豪雨で札幌における連続雨量は229mmであり、23日の日雨量は観測史上最大の207mmを記録した。豊平川の流量は急激に増加し、石狩川合流点から上流16.5km地点に位置する幌平橋では、異常に水位が上昇し、計画高水位を大きく超え、桁にまで波が達するようになった²⁾。図-2は、この洪水の石狩川合流



図-1 豊平川の位置と被災地点

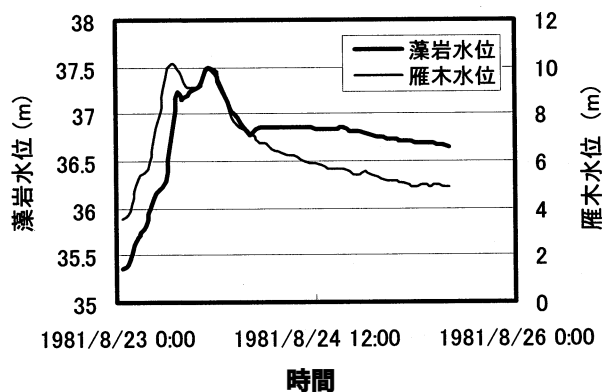


図-2 藻岩、雁来観測所の水位

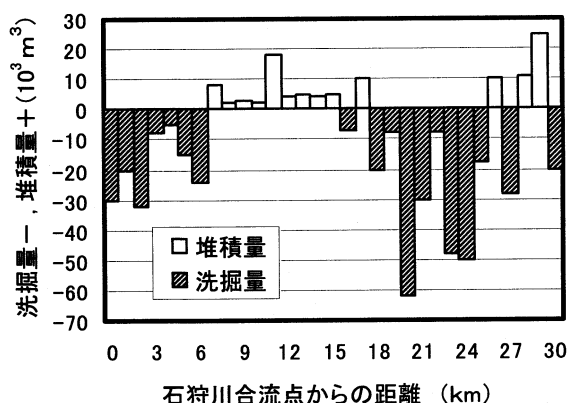


図-3 洪水後の土砂収支

点から上流11.1kmに位置する雁来と17.4kmに位置する藻岩での水位の変化を示したものである。また8月3～6日の豪雨で流域全体が飽和状態にあったという条件も重なり、この集中した豪雨による流出は水、土砂ともに多大であった。

図-3は石狩川合流点～上流31.0kmの区間において洪水後に調査した区間毎の土砂変動量を堆積量と洗掘量の差で表したものである²⁾。調査区間全体で約325,000m³洗掘量が多いことが分かった。区間ごとにみると、0～7km、18～25km区間では洗掘量が多く、とくに豊平川扇状地の扇頂部にあたる付近では洗掘が激しく、その中で20.5km地点では低水路が5m近くも深掘れした。一方7～18km区間では堆積量がまさっている。とくに17～18km区間では低水路が半分は埋塞するほどの堆積が起こり洪水後高水敷に流路ができるほどであった。

図-4は洪水前に調査した合流点から上流11～21kmまでの比高の縦断変化を示したものである。比高とは高水敷の平均河床高と低水路の平均河床高の差を示す。とくに17km付近の比高が全体から見て最も低いことがわかる。比高が低い分洪水流量が多量に高水敷上に流れ、高水敷上での掃流力が大きくなり、河床を大きく洗掘する。そのため、低水路間ではなく両堤防間を川幅全体とした河床形状の変化が発生したものと考えられる。一方で低水路内での洗掘量が多かった18～25km区間では比高が高かったという理由から洪水ピーク時でも高水敷にはさほど水が上がらず、そのため低水路の中での掃流力が増大し、低水路河床が大きく洗掘されたものと考えられる。このように、土砂の堆積、洗掘の要因は、川幅、比高が大きく関係している。

写真-1,2は、17km付近における低水路の土砂堆積の状況である。写真-2は写真-1に示す赤円部分を拡大したものである。図中の赤破線は、低水路護岸法肩の位置を示しており、赤破線より左が低水路、右が高水敷となっている。また流れは写真の上から下の方向に流れている。低水路に堆積した土砂が高水敷高と同程度の高さとなっているのがわかる。この土砂堆積を含む河道形状は砂州が発生したと思われる形状、とくに複列砂州河道に見られる河道中央部に形成される砂州であると考えられた。この洪水により豊平川では、高水敷から低水路へ、あるいは低水路から高水敷へ向かう流れによって低水路護岸やサイクリングロードの被災が報告されている。本研究ではこのことに着目し、流れの偏向をもたらす砂州の挙動を検討することとした。

2.2 渚滑川における高水敷に生じた洗掘

検討を行った洪水は1998年9月16～17日に渚滑川で発生した降雨出水である。渚滑川は、北海道東部に位置し、オホーツク海に注ぐ幹川流路延長84km、流域面積1,240km²の一級河川である。図-5に渚滑川の流域概要を示した。1998年9月の洪水は高水敷高以上に増水し、下流部の上渚滑及び渚滑橋の各観測所で計画高水位を超え、観測史上

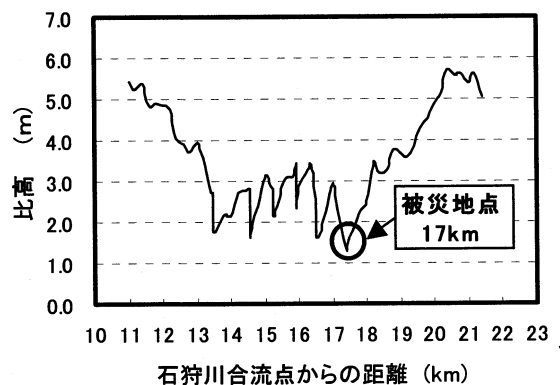


図-4 比高の縦断分布（洪水前）



写真-1 豊平川・低水路の土砂堆積状況(1)



写真-2 豊平川・低水路の土砂堆積状況(2)

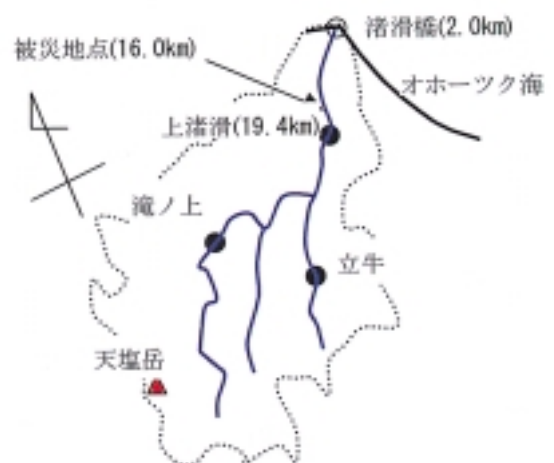
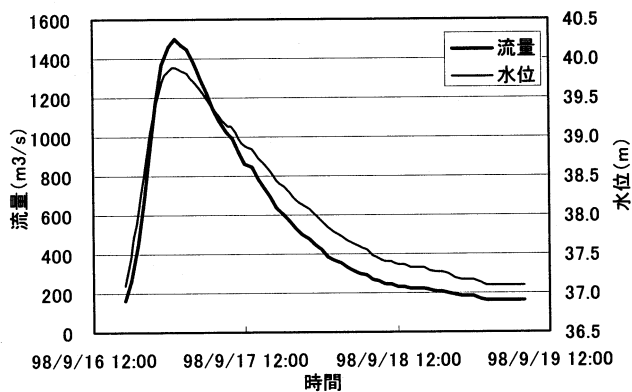
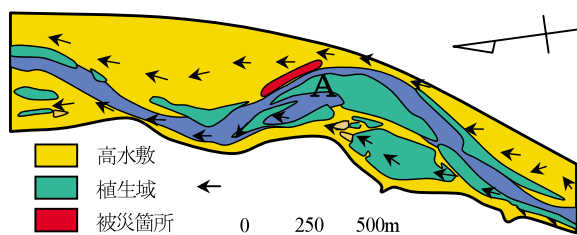


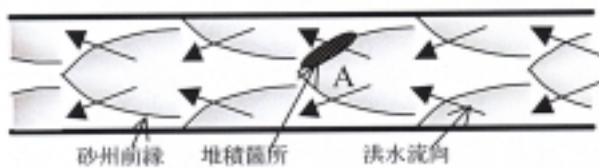
図-5 渚滑川流域概要



図－6 上渚滑における流量と水位



図－7 被災箇所付近の河道形状と痕跡による流向



図－8 被災箇所付近の砂州形状と流れの模式図

最高の水位を記録した³⁾。図－6は、この洪水の上渚滑における流量と水位の変化を示したものである。河口から19.4km上流に位置する上渚滑における流量および水位はそれぞれ1,500m³/sおよび39.89mであり、計画流量および水位の1,300m³/sおよび39.68mを上回っている。なお、越水の被害は報告されていない。

洪水期間中に写真－3に見られる砂州が発生したと思われる大きな深掘部が高水敷に形成され、低水路護岸が崩れる被害が報告されている。この災害は、河口から約16km上流の右岸高水敷で発生した。写真－3に見られるように、天端工の被災状況が低水路側に捲れあがるような状態でなく下部の土砂が流掃されたと思われる状態であったことから、護岸背面方向から低水路方向への戻り流れによる被災ではないと判断される。写真－4は、洪水直後に撮影された航空斜め写真である。写真中「A」と記した洗掘箇所前面の砂州の両側を洪水流が流下した形跡が読み取れるとともに、現地踏査によって把握した「A」と記した砂州



写真－3 渚滑川・高水敷の洗掘状況(1)



写真－4 渚滑川・高水敷の洗掘状況(2)

および周辺の砂州上に生育していた植生の多くが流出あるいは、倒伏していたことが確認できる。また、洗掘部直下流の高水敷が白っぽく写っているが、これは砂礫堆状の堆積が生じているためである。図中「A」と記した砂州は、高水敷高と同程度の高さとなっていた。図－7は洗掘発生位置及び植生の倒伏方向から判断した洪水流の流向を示したものである。河床形状及び流向等から判断すると、「A」と記した砂州は複列砂州河道に見られる河道中央部に形成される砂州であると考えられる。砂州、流向、被災箇所に着目し、模式的に表したものが図－8である。被災箇所は、砂州「A」の前縁部に位置していることがわかる。このことから被災の原因は洪水時の砂州前縁が護岸箇所に位置していたためであると判断された。このように、高水敷においても、砂州の発生により洗掘を受けることがわかったことから、被災箇所を含む河道に形成される砂州の挙動について検討を行うことにした。

3. 非定常流における線形安定解析の概要¹⁾

川幅 $2B^*$ の直線水路における非定常2次元浅水流水式と連続の式および掃流砂の発生を対象とした流砂連続式を $(U, V) = (U^*, V^*)/\bar{U}_0^*$ 、 $D = D^*/\bar{D}_0^*$ 、 $H = H^*/(\bar{F}_0^2 \bar{D}_0^*)$ 、 $(x, y) = (x^*, y^*)/B^*$ 、 $(Q_{bx}, Q_{by}) = (Q_{bx}^*, Q_{by}^*)/(\Delta g^* d_s^{*3})^{1/2}$ 、 $(\tau, t) = t^*/(1/\sigma^* B^* \bar{U}_0^*)$ 、 $(\tau_x, \tau_y) = (\tau_x^*, \tau_y^*)/\rho^* \bar{U}_0^{*2}$ で無次元化すると、(1)~(4)式となる。

$$\sigma \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{\beta}_0 \frac{\tau_x}{D} = 0 \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \bar{\beta}_0 \frac{\tau_y}{D} = 0 \quad (2)$$

$$\sigma \frac{\partial D}{\partial \tau} + \frac{\partial (UD)}{\partial x} + \frac{\partial (VD)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial (\bar{F}_0^2 H - D)}{\partial t} + \bar{Q}_0 \left(\frac{\partial Q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{by}}{\partial y} \right) = 0 \quad (4)$$

ここで、 t^* ；時間、 x^*, y^* ；縦横断方向座標軸、 U^*, V^* ； x^*, y^* 軸方向の流速、 H^* ；水位、 D^* ；水深、 η^* ；河床高 ($= H^* - D^*$)、 τ_x^*, τ_y^* ； x^*, y^* 軸方向の剪断力、 Q_{bx}^*, Q_{by}^* ； x^*, y^* 軸方向の掃流砂量、 ρ^* ；水の密度、 g^* ；重力加速度、 $1/\sigma^*$ ；洪水の継続時間である。また、 $\bar{F}_0 = \bar{U}_0^*/(g^* \bar{D}_0^*)^{1/2}$ 、 $\bar{\beta}_0 = B^*/\bar{D}_0^*$ 、 $\sigma = \sigma^* B^* \bar{U}_0^*$ 、 $\Delta = (\rho_s^* - \rho^*)/\rho^*$ 、 $Q_0 = (\Delta g^* d_s^{*3})^{1/2}/[(1-P) \bar{U}_0^* \bar{D}_0^*]$ であり、 ρ_s^*, P, d_s^* ；河床材料の単位堆積重量・空隙率・粒径、 $\bar{U}_0^*, \bar{H}_0^*, \bar{D}_0^*$ ；基底流の流速・水位・水深である。なお、*の付いた記号は有次元量を示し、付いていないものは無次元量を表している。

次に各諸量を、洪水波形によって決定されるものと、河床の変化に伴う摂動量に分け $U = U_0 + \varepsilon U_1$ 、 $V = \varepsilon V_1$ 、 $H = H_0 + \varepsilon H_1$ 、 $D = D_0 + \varepsilon D_1$ 、 $C_f = C_{f0} + \varepsilon C_{f1}$ 、 $\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon \vartheta_1$ 、 $\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1$ 等で表現する。 ϑ ；無次元掃流力、 ϕ ；単位幅流砂量を $(\Delta g^* d_s^{*3})^{1/2}$ で無次元化した掃流砂関数、 C_f ；河床摩擦係数、 ε ；摂動パラメータである。河床波の波長は一般に洪水波の波長に比べ十分小さい。このため、定点では時間的に洪水波の挙動すなわち水位の上昇下降等の挙動を示すが、洪水波によって決定される水深や流速の変化は時間のみに依存し、水面勾配は時間的に変化しない状態を扱うこととすると、波形によって決定される U_0, V_0, H_0, D_0 等は時間 t のみの関数であり、 x, y については一定値となる。水路側壁において横断方向流速 0 となる条件を考慮し、砂州形成に伴う摂動量 U_1, V_1, H_1, D_1 について、(5)式で表現する。

$$\begin{aligned} & \{U_1, V_1, H_1, D_1\} \\ &= \{\hat{U}_1, \hat{V}_1, \hat{H}_1, \hat{D}_1\} \{ \sin \eta_1, \cos \eta_1, \sin \eta_1, \sin \eta_1 \} \exp i + c.c. \end{aligned} \quad (5)$$

$\sin \eta_1 = \sin(\pi y/2)$ 、 $\cos \eta_1 = \cos(\pi y/2)$ 、 $\exp i = \exp(i\lambda x)$ で表され、 i ；虚数単位、 $c.c.$ ；共役複素数、 λ ；縦断方向砂州波数 ($\lambda = 2\pi B^*/L^*$ 、 L^* ；砂州波長) である。

通常 $\sigma \ll 1$ であり慣性項を省略するとともに、 $\hat{U}_1, \hat{V}_1, \hat{H}_1$ を $\hat{D}_1$ で表し整理すると(6)式が得られる。

$$\frac{\partial \hat{D}_1}{\partial t} + G(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{\vartheta}_0, D_0, \lambda) \hat{D}_1 = 0 \quad (6)$$

ここで、 $\bar{d}_{s0} = d_s^*/\bar{D}_0^*$ 、 $\bar{\vartheta}_0$ ；基底流の無次元掃流力である。(6)式の解は、 $G(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{\vartheta}_0, D_0, \lambda)$ が t に独立である場合、すなわち流れが定常状態の場合には、(7)式となる。

$$\hat{D}_1 = \exp[-Gt] \text{const} \quad (7)$$

流れが非定常流の場合は D_0 が時間の関数であり $G(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{\vartheta}_0, D_0, \lambda)$ は t の関数となる。したがって(6)式の解は、(8)式のようになる。

$$\hat{D}_1 = \exp\left[-\int_{t_0}^t G dt'\right] \text{const} \quad (8)$$

ここで t_0 ；洪水開始時刻である。(7)、(8)式の指数部は、摂動量が時間的にどのように変化していくかを表すものであり、つまり砂州の時間に関する摂動量の増幅率 Ω である。定常流の場合の増幅率を Ω_s として、(9)式になる。

$$\Omega_s = -G \quad (9)$$

一方、非定常流の場合 Ω_u として、(10)式で表す。

$$\Omega_u = -\int_{t_0}^t G dt' \quad (10)$$

増幅率が正の値のとき砂州は発達し、負の値の時は減衰する。増幅率の最大値を示す λ が、その時刻において最も発達する波数となる。また非定常流とした解析では、あらゆる値の λ がそれぞれの増幅率をもって各時刻において存在し、最も増幅率の大きな λ を卓越波数として時間的に変化しているものと想定している。

4. 安定解析の適用

検討に用いる断面形状は、縦断的にある程度の距離を持つ砂州の挙動を対象としていることから、豊平川では被災箇所を挟む石狩川合流点より上流15~18kmの地点を、渚滑川では河口から15~17kmの地点においての河道形状を平均した断面とした。なお、両地点とも低水路と高水敷の

表－１ 豊平川の解析検討に用いた諸元

川幅	基底流の水深	ピーク水深	河床勾配	河床材料
220m	0.6m	2.1m	1/145	3.8cm
	KP	ピーク水位	ピーク時刻	洪水継続時間
藻岩	17.4	37.5m	1981/8/23 17:00	54hr

表－２ 渚滑川の解析検討に用いた諸元

川幅	基底流の水深	ピーク水深	河床勾配	河床材料
320m	1.0m	3.1m	1/417	2.8cm
	KP	ピーク水位	ピーク時刻	洪水継続時間
上渚滑	19.4	38.9m	1998/9/17 2:00	64hr

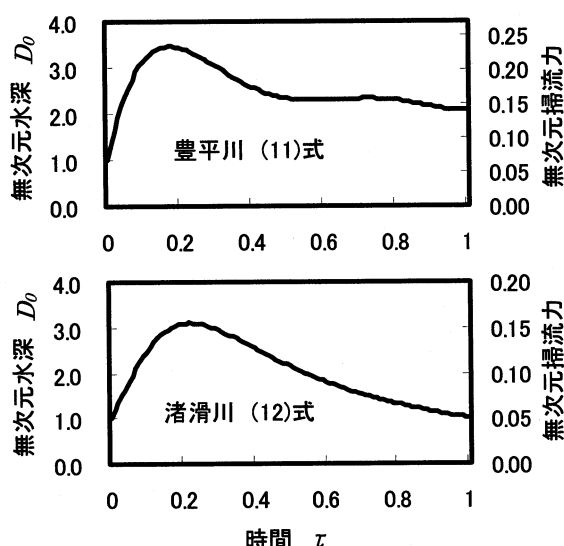
比高が低く高水敷における洗掘と砂州形成との対応を検討することから、堤々間を川幅とし、それに合わせて河床高も低水路高と高水敷高の平均値とした。また洪水のハイドロデータ D_0 は、豊平川では、区間に含まれる藻岩での観測水位を、渚滑川では直近の観測所である上渚滑における観測水位を基にして、(11)、(12)式で表される水深をそれぞれ用いた。(11)式が豊平川、(12)式が渚滑川で用いた式である。

$$D_0(\tau) = 98.53\tau^5 - 303.14\tau^4 + 345.09\tau^3 - 175.03\tau^2 + 35.64\tau + 1.0 \quad (11)$$

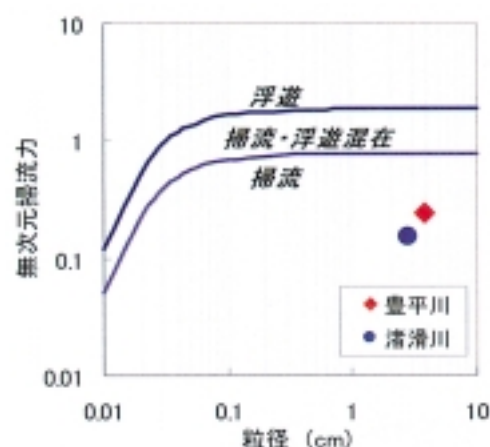
$$D_0(\tau) = \left[\frac{1.11(\tau + 0.393)^2}{\tau^2 + 0.0864} - 0.986 \right]^{3/2} \quad (12)$$

時間 τ は洪水継続時間 ($1/\sigma^*$) で無次元化した値であり、 $\tau = \sigma^* (B^*/\bar{U}^*) t$ の関係が成り立つ。またここで、洪水開始および終了を、土砂が移動する限界の掃流力 θ_c が 0.05 となる時刻とする必要がある。基底流量の水深 $\bar{D}^*$ として、 $\bar{\theta}_0$ が θ_c となる水深を用いた。また、渚滑川においては、 $\theta_0 > \theta_c$ となる範囲の時間としたが、豊平川では、限界掃流力 θ_c 以下となる水位が、洪水ピーク後長期間おとずれず、また、この後水位が上昇に転じるため、その直前までのハイドロとしている。図－９は(11)、(12)式で表される水深と無次元掃流力の時間変化を示したものである。また検討に用いた諸元を表－１、２にまとめて記している。

次に流砂の移動について、掃流砂と浮遊砂の発生条件の境界判定図⁴⁾を図－１０に示しているが、この図に２つの洪水について水位ピーク時間付近における水理量をプロットすると、掃流砂のみ発生する流れの条件に位置するため、流砂については掃流砂の影響のみを考慮することとした。また、 C_f, ϕ の具体的な関数形として、それぞれ(13)式で表される Engelund⁵⁾らによる摩擦係数および(14)式で表され



図－９ 無次元水深、掃流力の時間変化



図－１０ 掃流・浮遊境界判定図

る Meyer Peter-Müller⁶⁾の流砂関数を用いることとした。

$$C_f^{-1/2} = 6 + 2.5 \ln \left(\frac{D}{2.5d_s} \right) \quad (13)$$

$$\phi = 8(\theta - \theta_c)^{3/2} \quad (14)$$

図－１１、１２は、時間ごとの流れを非定常流として扱った場合の砂州増幅率すなわち、 Ω_u の時間変化について、単列砂州 Ω_{u1} と複列砂州 Ω_{u2} の違いを示したものである。図－１１は豊平川、図－１２は渚滑川における解析結果である。ここで Ω_u は、あらゆる値の λ の中で各時刻において最も大きくなる増幅率を示している。また、 D_0 の時間変化も併記した。図－１１に示す豊平川の解析結果では洪水のピーク後 $\tau=0.3$ 付近まで単列、複列砂州の増幅率が同程度の値で推移しているが、その後は複列砂州の増幅率が単列砂州の増幅率を上回る結果となっている。また

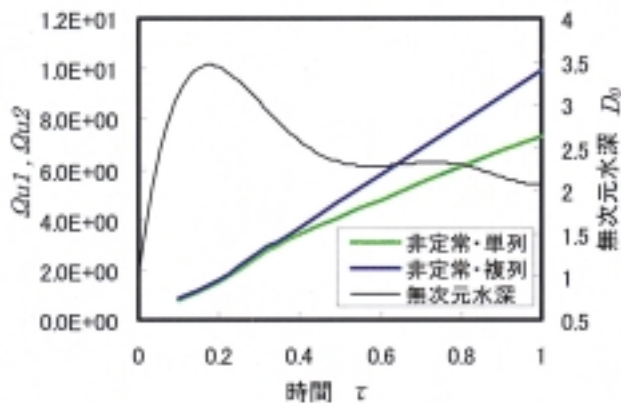


図-11非定常流での増幅率の時間変化（豊平川）

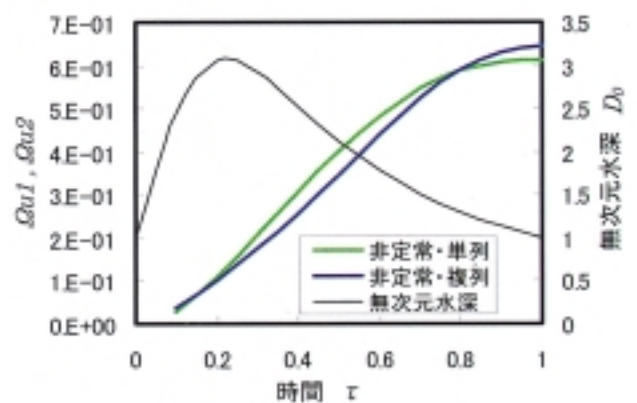


図-12非定常流での増幅率の時間変化（渚滑川）

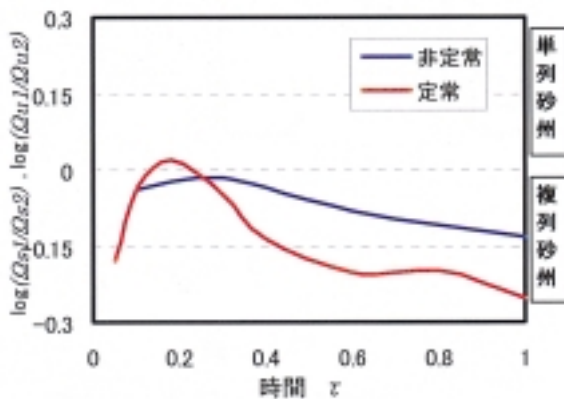


図-13単列、複列砂州の増幅率の比（豊平川）

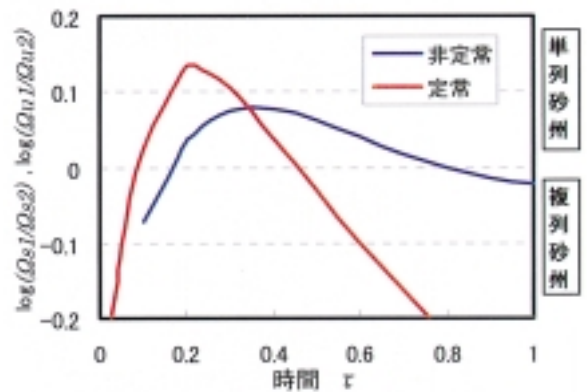


図-14単列、複列砂州の増幅率の比（渚滑川）

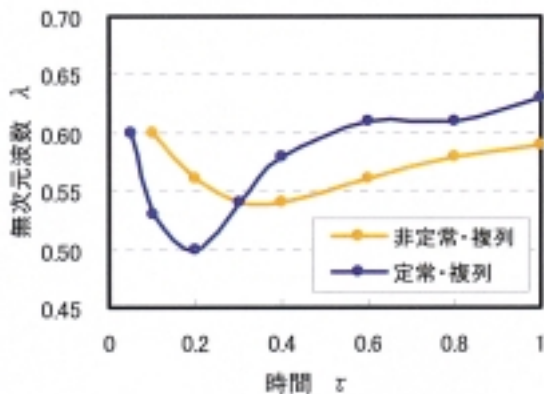


図-15単列、複列砂州の波数（豊平川）

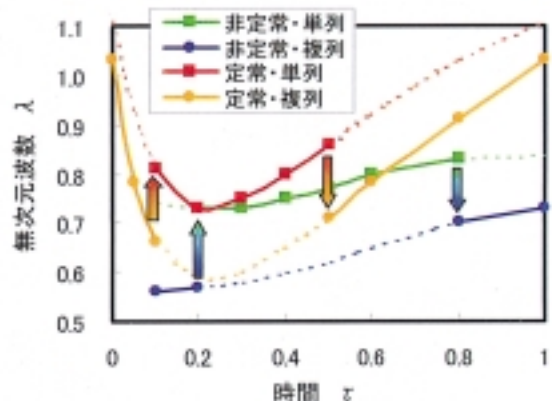


図-16単列、複列砂州の波数（渚滑川）

図-12に示す渚滑川の結果では τ が0.2付近すなわち水位ピーク頃まで単列砂州と複列砂州の増幅率がほぼ等しい。その後 τ が0.75付近まで単列砂州の増幅率が大きく、それ以降複列砂州の増幅率が大きくなっている。

図-13,14は、 Ω_{u1}/Ω_{u2} の比の対数をとった値の時間変化を示したものである。この値が正の値を示すと単列砂州の領域、負の値を示すと複列砂州の領域にあることを意味する。なお、比較のため流れを定常とした場合の増幅率の比 Ω_{s1}/Ω_{s2} についても併記している。

図-13の豊平川の結果では、定常流とした場合は水位

の上昇に伴い単列砂州領域に少し近づいているが、洪水継続時間全体として見れば、複列砂州領域にあることがわかる。非定常流とした場合も同様に複列砂州の領域にあった。一方、図-14の渚滑川における結果では単列、複列砂州の領域変化の遷移過程に顕著な違いが見られた。水位ピーク時 $\tau=0.22$ における砂州形状は、定常流の場合および非定常流の場合ともに単列砂州の領域に入っている。しかし増幅率の比は、定常流の場合が1.4であるのに対し非定常流の場合は1.1となっており、非定常流の場合のほうが複列砂州の増幅率との差は小さくなっている。また、複

列砂州の増幅率に対する単列砂州の増幅率の大きさが最も大きくなる時間は、定常流の場合に水位ピーク生起時刻であるのに対し、非定常流の場合には洪水ピーク後 $\tau=0.3\sim0.4$ 付近である。このように、定常流の場合および非定常流の場合とも水位の上昇に伴って複列砂州領域から単列砂州領域へと移り、その後水位の低下とともに複列砂州領域へと移行しているが、非定常流の場合のほうが単列砂州、複列砂州の遷移領域が長く続く結果が得られている。

次に、 λ の時間変化を図-15,16に示した。ここで、単列との明確な比較のために、複列砂州では2波長としたものを単列と同じ λ として扱っている。図-15の豊平川結果では、定常流を条件とした場合、洪水ピーク前まで λ が0.6~0.5へと時間とともに減少し、その後 λ が上昇に移っている。一方、非定常流とした解析では、 λ は大きく変化せずほぼ0.55~0.60の値で推移している。次に図-16の渚滑川における結果であるが、図-14において形成されると判断された砂州形態を実線でもう一方の形態を点線で示している。図中の矢印は、砂州波数曲線の単列から複列へあるいは複列から単列への移行を示したものである。定常流として扱った場合、洪水ピーク前まで λ が1.0~0.7へと時間とともに減少し、その後 λ が上昇に転じている。一方、非定常流とした解析では、砂州の形態が単列砂州と複列砂州の遷移的なものと考え、 λ は大きく変化せずほぼ0.55~0.75の値で推移しているものと考えられる。豊平川、渚滑川の各水理条件で非定常流として扱った解析をおこなうと、洪水期間中、 λ の変化がほぼ一定となる結果になった。

実際の河道の砂州形状を調査した結果、堤々間の川幅を基準とした砂州の λ は豊平川で、0.5~0.6付近、渚滑川では、0.6~0.7程度となり、非定常流とした場合の解析結果とほぼ一致する。また解析では λ がほぼ一定値であったことから、砂州の前縁の位置は大きく変化しなかったと推定される。このことにより豊平川では、砂州の堆積部分に位置する低水路に多く土砂が堆積し、また渚滑川では、砂州「A」の前縁に位置する高水敷に洗掘が生じたものと考えられる。

5. 浮遊砂が卓越する河川における砂州の形成

洪水時の河川流、とくに下流部においては浮遊砂が卓越しており、砂州の形成に浮遊砂の影響を考慮しなくてはいけないケースも存在する。そこで洪水時、浮遊砂が多量に発生しやすい河川を例にあげ、浮遊砂の発生が洪水時の砂州の形成にどのような影響を及ぼすのかを把握することにした。

検討に使用した洪水は、昭和56年8月に石狩川で発生

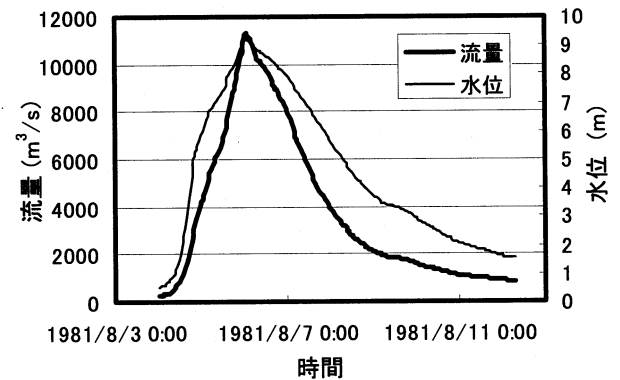


図-17 石狩大橋における流量と水位



図-18 昭和56年・石狩川洪水時の流向
(石狩川河口上流・9km~15km)

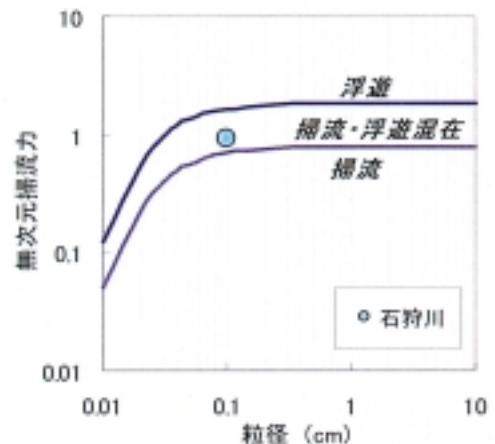


図-19掃流・浮遊境界判定図

した降雨出水である。図-17は石狩川の河口上流26.6kmに位置する石狩大橋での流量と水位の時間変化を示したものである。水位が洪水ピーク時間まで10mほど上昇しており、水位変動の大きい出水であった。図-18は石狩川の河口から上流9~15kmにおける河道図を示している⁷⁾。図中の赤線で示したものが、洪水ピーク時間付近で撮影された航空写真をもとにして判断した洪水流の流向である。洪水流が明確な蛇行を示し進行していることがわかる。また、洪水後に調査した河道の等深線図を色分けして表しているが、交互砂州の形状がはっきりと残っているのが見て取れる。また、図-19に表す掃流砂と浮遊砂の発生境界

判定図において図-18で示した河道区間の平均河床材料粒径値と洪水ピーク時間における水理量の値をプロットすると、掃流砂と浮遊砂の混在する流れの条件に位置される。そこで洪水時、河床に形成される砂州の挙動を、掃流砂に加え浮遊砂の影響も考慮した線形安定解析を実施し、検討することにした。

6. 浮遊砂項を含む線形安定解析の概要

線形安定解析の実施にあたり、浮遊砂の影響を考慮するため、流砂の連続式について浮遊砂の項を追加した(15)式で表す。

$$\frac{\partial(\bar{F}_0^2 H - D)}{\partial t} + \bar{Q}_0 \left[\frac{\partial(Q_{bx} + Q_{sx})}{\partial x} + \frac{\partial(Q_{by} + Q_{sy})}{\partial y} \right] = 0 \quad (15)$$

$Q_{sx}, Q_{sy}; x^*, y^*$ 軸方向の浮遊砂量を表し、また、 $(Q_{sx}, Q_{sy}) = (Q_{sx}^*, Q_{sy}^*) / (\Delta_g^* d_s^{*3})^{1/2}$ のように無次元化している。浮遊砂濃度の連続式については、3次元表示である(16)式で与えている。

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial C}{\partial \tau} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} - \bar{\beta}_0 w_f \frac{\partial C}{\partial z} \\ = \frac{\psi}{\bar{\beta}_0} \sqrt{C_{f0}} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \bar{\beta}_0 \sqrt{C_{f0}} \psi \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 C ；浮遊砂濃度、 w_f ；砂粒子の沈降速度 ($w_f = w_f^* / \bar{U}_0^*$)、 ψ ；渦動粘性係数、 z ；基準面からの高さ ($z = z^* / \bar{D}_0^*$) である。

また、砂粒子の沈降速度は(17)式で表される Rubey⁸⁾の式、基準面濃度は(18)式で表される Van Rijn⁹⁾の式をそれぞれ用いた。 R_p は粒子レイノルズ数である。

$$w_f = \sqrt{\frac{C_{f0}}{g_0}} \left(\sqrt{\frac{2}{3} + 36 \frac{g_0}{R_p^2}} - \sqrt{36 \frac{g_0}{R_p^2}} \right) \quad (17)$$

$$C_{b0} = 0.015 \frac{d_s}{a_v R_p^{0.2} g^{-0.1}} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} a_v &= \exp \left(2.4 - \frac{1}{2.5 \sqrt{C_{f0}}} \right) \\ T &= \frac{g - g_c}{g_c} \end{aligned}$$

浮遊砂濃度は、波形によって決定される値と、河床の変化に伴う摂動量に分け、 $C = C_0 + \varepsilon C_1$ とする。摂動量 C_1 は(19)式のように表現できる。

表-3 石狩川の解析検討に用いた諸元

川幅	基底流の水深	ピーク水深	河床勾配	河床材料
300m	3.5m	11.2m	1/7000	1.0cm
	KP	ピーク水位	ピーク時刻	洪水継続時間
石狩大橋	26.6	9.23m	1981/8/6 2:00	185hr

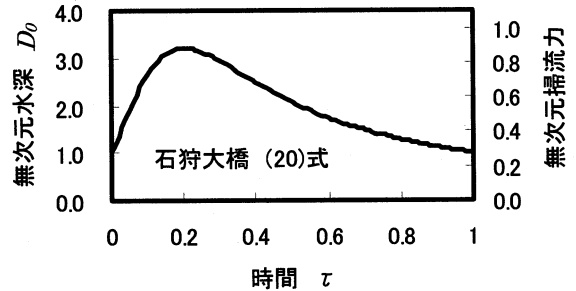


図-20 無次元水深、掃流力の時間変化

$$C_1 = \left\{ \hat{C}_1 \right\} \left\{ \sin_1, \cos_1, \sin_1, \sin_1 \right\} \exp_1 + c.c \quad (19)$$

$\sin_1 = \sin(\pi y/2)$ 、 $\cos_1 = \cos(\pi y/2)$ 、 $\exp_1 = \exp(i\lambda x)$ で表現し、 $\hat{C}_1$ は C_1 の振幅を示している。これらを用いて、3章で述べた線形安定解析を実施し、浮遊砂を考慮した砂州の増幅率を導出した。その結果、掃流砂のみを考えた場合の(6)式の $G(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{g}_0, D_0, \lambda)$ は、浮遊砂も考慮すると

$$\begin{aligned} G(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{g}_0, D_0, \lambda) &= \frac{\bar{F}_0^2}{\bar{F}_0^2 f_H - 1} \frac{\partial f_H}{\partial t} \\ &= \frac{\bar{Q}_0 \phi_0}{\bar{F}_0^2 f_H - 1} \left\{ i\lambda \left[\frac{2\Phi_T}{K(1-C_T)} D_0^{-\frac{1}{2}} f_U + \left(\frac{C_D}{1-C_T} \Phi_T + \Phi_D \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \pi \left[\frac{1}{KD_0^{\frac{1}{2}}} f_V - \frac{1}{2} \pi \frac{r}{\bar{\beta}_0 g_0} (\bar{F}_0^2 f_H - 1) \right] \right\} + \frac{1}{\bar{F}_0^2 f_H - 1} \times \\ &\quad \frac{1}{1-P} \left[-\frac{1}{2} \pi \frac{1}{W_f} C_{b0} X f_V + \left(\frac{1}{W_f} C_{b0} X + KD_0^{\frac{1}{2}} K_{1U} \right) i\lambda f_U + \right. \\ &\quad \left. (C_{b0} + KD_0^{\frac{1}{2}} K_{1D}) i\lambda + (-C_{b0} X + KD_0^{\frac{1}{2}} K_{1H}) \bar{F}_0^2 i\lambda f_H \right] \end{aligned} \quad (20)$$

(20)式となる。

増幅率 Ω については、(定常流： $\Omega_s = -G$ 、非定常流 $\Omega_u = -\int_0^t G dt'$) となる。導出過程の詳細は、後述の補遺を参照されたい。

7. 解析結果

検討に使用する水位データは、石狩大橋における観測水位を用いており、これをもとに(21)式で表される水深を解析に適用した。

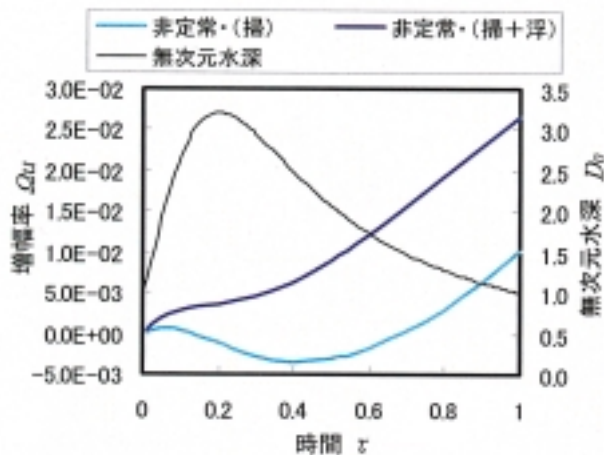


図-21非定常流での増幅率の時間変化

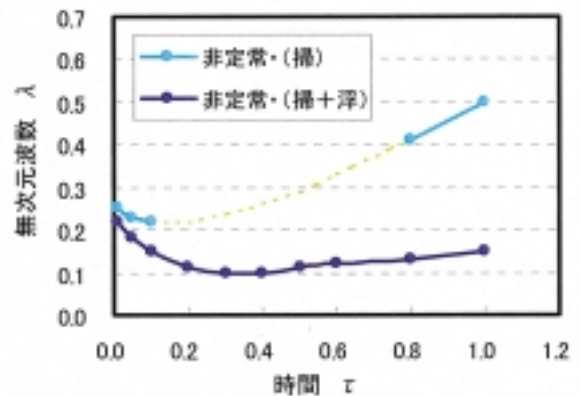


図-22非定常流でのλの時間変化

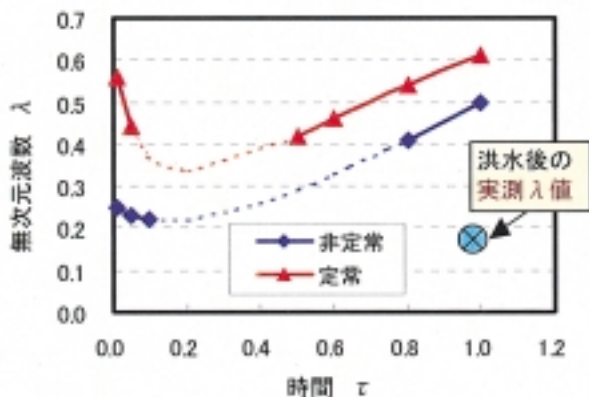


図-23 λの時間変化(掃流砂のみの場合)

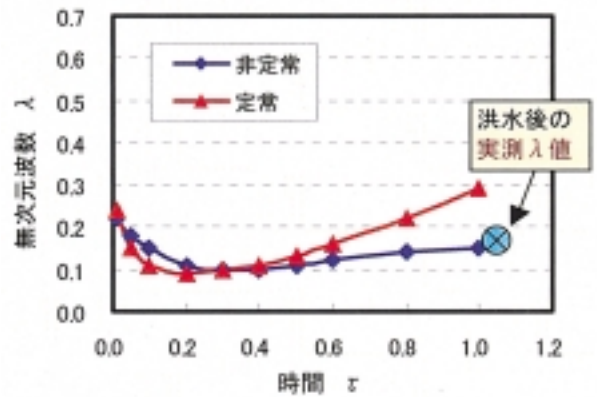


図-24 λの時間変化(浮遊砂を考慮した場合)

$$D_0(\tau) = \left[\frac{1.176(\tau + 0.333)^2}{\tau^2 + 0.0667} - 0.960 \right]^{3/2} \quad (21)$$

検討に用いる断面形状は、石狩川河口より上流9～15 km付近の河道形状とした。図-20は(21)式で表される水深と無次元掃流力の時間変化を示したものである。また表-3に解析に使用した水理諸元をまとめて示しているが、低水路内において洪水流の蛇行が確認されたことから、低水路幅を川幅として解析を行っている。

図-21は流れを非定常流として扱った場合の砂州増幅率 Ω_u の時間変化について、掃流砂と浮遊砂両方の発生を考慮した場合と掃流砂の発生のみを考慮した場合の違いを示したものである。また、無次元水深 D_0 の時間変化も併記しており、 $\tau=0.2$ において水位のピークがおとずれる。浮遊砂を考慮した場合、時間変化で増幅率の値が上昇し続けている。一方、掃流砂のみを考慮した場合では水位の上昇に伴い増幅率が減少しており、洪水ピーク以降の $\tau=0.4$ 付近で増幅率は最小の値をとる。その後、増幅率は上昇し、 $\tau=0.7$ で砂州発生領域に入っている。

次に、図-21において増幅率が最大となる λ の時間変化を図-22に示した。砂州が発生すると判断された時間を実線で、発生しない場合は、その時刻において最も増幅率が大きくなる時の λ 値を便宜上プロットし、破線で示した。掃流砂のみを扱った場合、 $\tau=0.1$ まで砂州が発生しているが、それ以降は長期間砂州の発生が認められず、 $\tau=0.8 \sim 1.0$ の時間において、 $\lambda=0.4 \sim 0.5$ の値での砂州形成が判断された。浮遊砂を考慮した条件では、全ての時刻において砂州の発生が認められた。すなわち、掃流砂のみを考慮した条件では砂州の形成が見られなかった水深条件でも、浮遊砂の影響を考慮したことにより砂州の形成が判断されたことになる。また、洪水初期において掃流砂のみを扱った場合と比較して λ の値に大きな差が見られないが、洪水後期で発生した砂州の λ の値に関しては、0.25～0.35の大きい差が生じている。

次に、流れを定常流とした場合と非定常流とした場合とで、 λ の時間変化を比較したものが、図-23,24である。図-23が掃流砂の発生のみを考慮した場合、図-24が掃流砂と浮遊砂両方の発生を考慮した場合の結果を示している。図-23の掃流砂のみとした解析では、洪水初期時間

に発生する λ の値に顕著な差が生じており、非定常流としたケースの方が λ の値が小さくなっている。同様に非定常流とした解析の方が、洪水ピーク直前の $\tau=0.1$ 以降から始まっている砂州の発生が認められない時間帯が長く続いている結果となった。一方、図-24の浮遊砂を考慮したケースにおいては、洪水ピーク前までの両者の λ 値に大きな変化は見られないが、ピーク後からの λ 値の変化が非定常流での解析の方が小さく、ほぼ一定値で推移していることがわかった。このように、定常流を想定した場合と、非定常流として扱った場合とでは、砂州の発生から非発生へと遷移する時間と過程、及び λ の時間変化について大きな違いが見られる。また、洪水後に調査した現場の交互砂州形状の実測 λ 値をグラフにプロットすると、流れを非定常流とし、浮遊砂の影響を考慮した解析方法と、 λ 値がほぼ一致するという結果を得ることができた。

8. おわりに

豊平川では被災箇所での高水敷と低水路河床の比高が他区間に比べ最も小さかった。比高が小さい分、洪水流が多量に高水敷上に流出し、高水敷の掃流力が増大になって河床を大きく洗掘した。また、河道が堤々間に拡がったことにより、砂州の複列化に繋がり河道の中央に位置する低水路部分に大きく堆積した。一方、被災箇所のすぐ上流部は比高が高いため、高水敷には水が多く上がらず、そのため上流部では低水路内の土砂が多量に被災地点を含む下流部に運搬された。その影響も大きな土砂堆積が発生した一因となっていると考えられる。また、砂州の形成に洪水の特徴である非定常性を取り込んだ線形安定解析を行い、洪水時の水理量を用いた解析をした結果、この区間で大きく複列砂州が発生している結果となった。渚滑川では、植生の倒伏状況から判読した流向、砂州を含む河床形状等、洪水直後の現地踏査の結果、高水敷に生じた規模の大きな洗掘が複列砂州の形成によるものであると判断された。しかし、定常流として解析が行われた既往の砂州領域区分では複列砂州が形成される条件ではないと判断され、現地踏査からの判断と食い違いをみせた。このことから、同様に洪水の非定常性を取り込んだ解析を行うこととした。その結果、非定常性を考慮することにより砂州の領域区分が変化し、洪水期間中単列砂州と複列砂州の遷移領域に入っていたと想定され、現地踏査の結果とも一致する結果を得ることができた。

一般に、高水敷は低水路に比べ敷高が高く、その分低水路に比べ掃流力が小さく、洗掘を受けずらいと考えられている。しかし、計画高水位に達するような規模の洪水では、高水敷であっても砂州が形成され、規模の大きな洗掘が生

じることがあり、複断面河道においても堤々間を河床とみなした考え方を行わなければならない場合があるとともに、河床形状を考える場合には洪水の非定常性を考慮することにより、洪水時の河床形態についてある程度把握できることを明らかにした。

また、石狩川における洪水の際には、洪水ピーク時間付近において洪水流の蛇行が確認され、交互砂州が形成されていたと判断されたが、線形安定解析を行い洪水時の砂州の挙動を把握しようと試みた結果、掃流砂のみを考慮した解析条件では洪水期間中に砂州の発生が認められなかった時間が長期間存在していたのに対し、浮遊砂の影響を考慮することにより、長い波長を持った砂州の発生が、洪水中、継続して生じていることを確認し、現地と同様の結果を得ることができた。洪水時浮遊砂が卓越する河川においては、その影響を考慮する必要性が示唆された。

謝 辞

本研究で用いた航空写真、洪水流の流向データ、水位データおよび測量データは、国土交通省北海道開発局石狩開発建設部、網走開発建設部治水課からいただいた。ここに記して感謝申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 渡邊康玄、Tubino M、Zolezzi G：非定常流における交互砂州の安定解析、土木学会第56回年次学術講演会講演概要集第2部、2001。
- 2) 吉井厚志、馬場仁志：昭和56年豊平川土砂災害と砂防計画、建設省技術発表会論文、1982。
- 3) 北海道開発局網走開発建設部：平成10年9月16日～17日発生（台風5号）洪水報告書、1998。
- 4) 北海道開発局土木試験所河川研究室：現場のための水理学、1988。
- 5) Engelund, F and Hansen, E : A Monograph on Sediment Transport in Alluvial Streams, Copenhagen, Danish Technical Press, 1967。
- 6) Meyer-Peter, E., and Müller, R. : Formulas for Bed-Load Transport, Proc. 2nd IAHR Meeting, Stockholm, pp. 39-64, 1948。
- 7) 北海道開発局石狩開発建設部・札幌河川事務所：平成13年度石狩川下流河岸検討業務報告書、2001。
- 8) Rubey W.W. : Settling Velocities of Gravel, Sand and Silt Particles, Amer Jour. Sci., Vol. 25, 1933
- 9) Van Rijn, L.C. : Sediment Transport Part II, Suspended load transport, Jour. of Hydr. Eng. ASCE, Vol. 110, No. 11, 1985。



大山 史晃*

平成13年度依頼研修員
財団法人北海道河川防
災研究センター研究員
(株式会社北開水工コ
ンサルタント)



渡邊 康玄**

北海道開発土木研究所
環境水工部
河川研究室 室長
博士(工学)

掃流砂・浮遊砂により形成される交互砂州の線形安定解析

1. 基礎式

川幅 $2B^*$ の直線水路における拡散項を省略した非定常 2 次元浅水流式と連続の式および掃流砂と浮遊砂を対象とした流砂連続式は、式(1)～(4)で表される。

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} + g^* \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + \frac{\tau_x^*}{\rho^* D^*} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} + g^* \frac{\partial H^*}{\partial y^*} + \frac{\tau_y^*}{\rho^* D^*} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(U^* D^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(V^* D^*)}{\partial y^*} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(Q_{bx}^* + Q_{sx}^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(Q_{by}^* + Q_{sy}^*)}{\partial y^*} = 0 \quad (4)$$

ここで、 t^* ；時間、 x^*, y^* ；縦横断方向座標軸、 U^*, V^* ； x^*, y^* 軸方向の流速、 H^* ；水位、 D^* ；水深、 η^* ；河床高($=H^*-D^*$)、 τ_x^*, τ_y^* ； x^*, y^* 軸方向の剪断力、 Q_{bx}^*, Q_{by}^* ； x^*, y^* 軸方向の掃流砂量、 Q_{sx}^*, Q_{sy}^* ； x^*, y^* 軸方向の浮遊砂量、 ρ^* ；水の密度、 g^* ；重力加速度である。

一般に河床波の時間スケールは、河床波に対する流れの応答時間に比べてかなり長い。そこで、洪水波による流れの変化と河床波に応答する流れの時間スケールをそれぞれ、洪水の継続時間 $1/\sigma^*$ と $B^*/\bar{U}_0^*$ で基準化する。式(1)～(4)は、以下の諸元、

$$\begin{aligned} (U, V) &= (U^*, V^*) / \bar{U}_0^* \\ D &= D^* / \bar{D}_0^* \\ H &= H^* / (\bar{F}_0^2 \bar{D}_0^*) \\ (x, y) &= (x^*, y^*) / B^* \\ (\tau, t) &= (\tau^*, t^*) / (1/\sigma^*, B^* / \bar{U}_0^*) \\ (\tau_x, \tau_y) &= (\tau_x^*, \tau_y^*) / (\rho^* \bar{U}_0^{*2}) \\ (Q_{bx}, Q_{by}) &= (Q_{bx}^*, Q_{by}^*) / \left(\Delta g^* d_s^{*3} \right)^{1/2} \\ (Q_{sx}, Q_{sy}) &= (Q_{sx}^*, Q_{sy}^*) / \left(\Delta g^* d_s^{*3} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

で無次元化を行うと式(5)～(8)になる。

$$\sigma \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} + \bar{\beta}_0 \frac{\tau_x}{D} = 0 \quad (5)$$

$$\sigma \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} + \bar{\beta}_0 \frac{\tau_y}{D} = 0 \quad (6)$$

$$\sigma \frac{\partial D}{\partial \tau} + \frac{\partial(UD)}{\partial x} + \frac{\partial(VD)}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\bar{F}_0^2 H - D)}{\partial t} + \bar{Q}_0 \left[\frac{\partial(Q_{bx} + Q_{sx})}{\partial x} + \frac{\partial(Q_{by} + Q_{sy})}{\partial y} \right] = 0 \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_0 &= B^* / \bar{D}_0^* \\ \sigma &= \sigma^* B^* / \bar{U}_0^* \\ \Delta &= (\rho_s^* - \rho^*) / \rho^* \\ \bar{F}_0 &= \bar{U}_0^* / (g^* \bar{D}_0^*)^{1/2} \\ \bar{Q}_0 &= (\Delta g^* d_s^{*3})^{1/2} / [(1-P) \bar{U}_0^* \bar{D}_0^*] \end{aligned}$$

であり、 ρ_s^*, P, d_s^* ；河床材料の単位堆積重量・空隙率・粒径、 $\bar{U}_0^*, \bar{H}_0^*, \bar{D}_0^*$ ；基底流の流速・水位・水深である。なお、 $*$ の付いた記号は有次元量を示し、付いていないものは無次元量を表している。なお、 $1/\sigma^*$ および $B^*/\bar{U}_0^*$ の基本単位は一般に、それぞれ日、および分（時間）であることから σ は微小なパラメータである。

境界条件は、水路側壁において横断方向流速および横断方向流砂量が 0 となる条件であり、式(9)、(10)で表される。

$$V = 0 \quad ; \quad y = \pm 1 \quad (9)$$

$$Q_{by} = 0 \quad ; \quad y = \pm 1 \quad (10)$$

縦横断方向流砂量は、掃流砂量を用いて式(11)、(12)で表される。

$$Q_{bx} = \phi \cos \delta \quad (11)$$

$$Q_{by} = \phi \sin \delta \quad (12)$$

ここで、 ϕ ；単位幅流砂量を $(\Delta g^* d_s^{*3})^{1/2}$ で無次元化した掃流砂関数である。 δ は流砂と流れの方向のずれを考慮した式(13)、(14)を用いる。

$$\sin \delta = V(U^2 + V^2)^{-1/2} - \frac{r}{\bar{\beta}_0 \vartheta^{1/2}} \frac{\partial(\bar{F}_0^2 H - D)}{\partial y} \quad (13)$$

$$\cos \delta = (1 - \sin^2 \delta)^{1/2} \quad (14)$$

なお、 r は定数であり、ここでは 0.3 とした。また、 ϑ は無次元掃流力であり、式(15)なる関係がある。

$$\vartheta = \frac{\bar{F}_0^2}{\Delta d_{s0}} (\tau_x^2 - \tau_y^2)^{1/2} \quad (15)$$

ここで、

$$\bar{d}_{s0} = d_s^* / \bar{D}_0^*$$

である。

一方、浮遊砂については、浮遊砂濃度の連続式を3次元表示である式(16)で与える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t^*} + U^* \frac{\partial C}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial C}{\partial y^*} - w_f^* \frac{\partial C}{\partial z^*} \\ = \psi^* \frac{\partial^2 C}{\partial x^{*2}} + \psi^* \frac{\partial^2 C}{\partial y^{*2}} + \psi^* \frac{\partial^2 C}{\partial z^{*2}} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 C ; 浮遊砂濃度、 w_f^* ; 砂粒子の沈降速度、 ψ^* ; 渦動粘性係数、 z^* ; 基準面からの高さである。式(16)は、

$$\begin{aligned} z &= z^* / \bar{D}_0^* \\ w_f &= w_f^* / \bar{U}_0^* \\ \psi &= \psi^* / \bar{D}_0^* (\Delta g^* d_s^{*3})^{1/2} \end{aligned}$$

を用い無次元化を行うと式(17)となる。

$$\begin{aligned} \sigma \frac{\partial C}{\partial \tau} + U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} - \bar{\beta}_0 w_f \frac{\partial C}{\partial z} \\ = \frac{\psi}{\bar{\beta}_0} \sqrt{C_{f0}} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + \bar{\beta}_0 \sqrt{C_{f0}} \psi \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 C_{f0} ; 河床摩擦係数 ($= U_*^{*2} / U_*^{*2}$, U_* ; 摩擦速度) である。 x, y 方向の浮遊砂量は式(18), (19)で表すこととした。なお、浮遊砂濃度の連続式において水面および浮遊砂濃度の基準面における境界条件は(20)式である。

$$Q_{sx} = U \int_{\bar{F}_0^2 H - D}^{\bar{F}_0^2 H} C dz \quad (18)$$

$$Q_{sy} = V \int_{\bar{F}_0^2 H - D}^{\bar{F}_0^2 H} C dz \quad (19)$$

$$\begin{aligned} -\bar{\beta}_0 w_f C = \bar{\beta}_0 \sqrt{C_{f0}} \psi \frac{\partial C}{\partial z} \\ z = D + \eta, \quad C = C_{b0}; \quad z = a_v + \eta \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 a_v ; 浮遊砂濃度 C の基準面高さ、 C_{b0} ; 基準面濃度である。

2. 線形化

U, V, H, D, C について洪水波形によって決定されるものと、河床の変化に伴う摂動量に分け、

$$U = U_0 + \varepsilon U_1$$

$$V = \varepsilon V_1$$

$$H = H_0 + \varepsilon H_1$$

$$D = D_0 + \varepsilon D_1$$

$$C = C_0 + \varepsilon C_1$$

として表現することとする。 U_0, V_0, H_0, D_0, C_0 は、時間 t のみの関数であり、 x, y については一定値である。

さらに、 $\tau_x, \tau_y, \phi, \vartheta, \psi, C_f$ を、

$$\tau_x = \tau_{x0} + \varepsilon \tau_{x1}$$

$$\tau_y = \varepsilon \tau_{y1}$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_0 \phi_1$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon \vartheta_0 \vartheta_1$$

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1$$

$$C_f = C_{f0} + \varepsilon C_{f1}$$

とする。 ε ; 摂動パラメータである。河床波の波長は一般に洪水波の波長に比べ十分小さい。このため、定点では時間的に洪水波の挙動すなわち水位の上昇下降等の挙動を示すが、洪水波によって決定される水深や流速の変化は時間的に依存し、水面勾配は時間的に変化しない状態を扱うこととする。 σ のオーダーが ε のオーダーに比較して、小さい場合、式(5)~(8), (17)は ε^0 次のオーダーについて式(21), (22), ε^1 次のオーダーについて式(23)~(27)を得る。

$$\frac{\partial H_0}{\partial x} + \bar{\beta}_0 \frac{\tau_{x0}}{D_0} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial (\bar{F}_0^2 H_0 - D_0)}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

$$U_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \bar{\beta}_0 \left(\frac{\tau_{x1}}{D_0} - \frac{\tau_{x0}}{D_0} \frac{D_1}{D_0} \right) = 0 \quad (23)$$

$$U_0 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial H_1}{\partial y} + \bar{\beta}_0 \frac{\tau_{y1}}{D_0} = 0 \quad (24)$$

$$D_0 \frac{\partial U_1}{\partial x} + D_0 \frac{\partial V_1}{\partial y} + U_0 \frac{\partial D_1}{\partial x} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial (\bar{F}_0^2 H_1 - D_1)}{\partial t} + \bar{Q}_0 \left[\frac{\partial (Q_{bx1} + Q_{sx1})}{\partial x} + \frac{\partial (Q_{by1} + Q_{sy1})}{\partial y} \right] \quad (26)$$

$$\begin{aligned} U_0 \frac{\partial C_1}{\partial x} - \bar{\beta}_0 w_f \frac{\partial C_1}{\partial z} = \frac{\sqrt{C_{f0}}}{\bar{\beta}_0} \psi_0 \left(\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial y^2} \right) \\ + \bar{\beta}_0 \sqrt{C_{f0}} \left(\psi_0 \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} + \psi_1 \frac{\partial^2 C_0}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $Q = 1 / \bar{Q}_0 (1 - P)$ である。

式(22)より、洪水波形そのものによる河床変化は、縦断的に動的安定状態を仮定しており、変化しないことを示している。

3. 交互砂州の増幅率

次に、境界条件式(9), (10)を考慮し、 U_1, V_1, H_1, D_1, C_1 について、交互砂州形成に伴う摂動量として、式(28)で表現する。

$$\begin{aligned} \{U_1, V_1, H_1, D_1, C_1\} = \{\hat{U}_1, \hat{V}_1, \hat{H}_1, \hat{D}_1, \hat{C}_1\} \\ \{Sin_1, Cos_1, Sin_1, Sin_1\} Exp_1 + c.c \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、

$$\sin_1 = \sin\left(\frac{\tau}{2}y\right), \quad \cos_1 = \cos\left(\frac{\tau}{2}y\right), \quad \exp_1 = (i\lambda x)$$

であり、 i ；虚数単位、 $c.c$ ；共益複素数、 λ ；砂州の縦断方向波数である。砂州波長 L^* と λ の関係は、 $\lambda = 2\pi B^*/L^*$ である。また、 $\hat{U}_1, \hat{V}_1, \hat{H}_1, \hat{D}_1, \hat{C}_1$ はそれぞれ、 U_1, V_1, H_1, D_1, C_1 の振幅である。

式(27)から、 ε^1 次のオーダーの浮遊砂濃度の振幅 $\hat{C}_1$ は、 $\hat{U}_1, \hat{H}_1, \hat{D}_1$ の関数として求められ、式(29)で表す。

$$\hat{C}_1 = J_1 \exp(j_1 z) + J_2 \exp(j_2 z) + J_0 \exp\{-W_f(z - a_v)\} \quad (29)$$

ここで、 $W_f, j_1, j_2, J_1, J_2, J_0$ は、以下のように表す。

$$W_f = \frac{w_f}{\sqrt{C_{f0}\psi_0}}$$

$$j_1 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 - 4v^2}}{2}$$

$$j_2 = \frac{-v_1 - \sqrt{v_1^2 - 4v^2}}{2}$$

$$v_1 = W_f$$

$$v_2 = -\frac{1}{\beta_0^2}(\lambda^2 + \frac{1}{4}\pi^2) - \frac{W_f}{\beta_0 w_f} i\lambda U_0$$

$$J_0 = J_{0u}\hat{U}_1 + J_{0d}\hat{D}_1$$

$$J_1 = J_{1u}\hat{U}_1 + J_{1d}\hat{D}_1 + J_{1h}\bar{F}_0^2 \hat{H}_1$$

$$J_2 = J_{2u}\hat{U}_1 + J_{2d}\hat{D}_1 + J_{2h}\bar{F}_0^2 \hat{H}_1$$

$$J_{0u} = \frac{\frac{1}{2}s_1 W_f^2 C_{b0}}{\frac{1}{\beta_0^2}(\lambda^2 + \frac{1}{4}\pi^2) + \frac{W_f}{\beta_0 w_f} i\lambda U_0}$$

$$J_{0d} = \frac{\frac{1}{2}(s_2 + 2)W_f^2 C_{b0}}{\frac{1}{\beta_0^2}(\lambda^2 + \frac{1}{4}\pi^2) + \frac{W_f}{\beta_0 w_f} i\lambda U_0}$$

$$J_{1u} = \frac{\frac{1}{2}W_f C_{b0} s_1 \exp\{-W_f(1 - a_v)\} \exp(j_2 a_v)}{(j_1 + W_f) \exp(j_1) \exp(j_2 a_v) - (j_2 + W_f) \exp(j_2) \exp(j_1 a_v)} + \frac{J_{0u}(j_2 + W_f) \exp(j_2)}{(j_1 + W_f) \exp(j_1) \exp(j_2 a_v) - (j_2 + W_f) \exp(j_2) \exp(j_1 a_v)}$$

$$J_{1d} = \frac{\frac{1}{2}W_f C_{b0} (s_2 + 2) \exp\{-W_f(1 - a_v)\} \exp(j_2 a_v)}{(j_1 + W_f) \exp(j_1) \exp(j_2 a_v) - (j_2 + W_f) \exp(j_2) \exp(j_1 a_v)} + \frac{(J_{0d} + W_f C_{b0})(j_2 + W_f) \exp(j_2)}{(j_1 + W_f) \exp(j_1) \exp(j_2 a_v) - (j_2 + W_f) \exp(j_2) \exp(j_1 a_v)}$$

$$J_{1h} = \frac{-W_f C_{b0}(j_2 + W_f) \exp(j_2)}{(j_1 + W_f) \exp(j_1) \exp(j_2 a_v) - (j_2 + W_f) \exp(j_2) \exp(j_1 a_v)}$$

$$J_{2u} = \frac{-J_{1u} \exp(j_1 a_v) - J_{0u}}{\exp(j_2 a_v)}$$

$$J_{2d} = \frac{-J_{1d} \exp(j_1 a_v) - J_{0d} - W_f C_{b0}}{\exp(j_2 a_v)}$$

$$J_{2h} = \frac{-J_{1h} \exp(j_1 a_v) + W_f C_{b0}}{\exp(j_2 a_v)}$$

$$s_1 = \frac{2}{1 - C_T}, \quad s_2 = \frac{C_D}{1 - C_T}$$

ここで、

$$C_T = \frac{\partial_0}{c_{f0}} \frac{\partial c_f}{\partial g} \Big|_{g=g_0}, \quad C_D = \frac{1}{c_{f0}} \frac{\partial c_f}{\partial D} \Big|_{D=D_0}, \quad U_0 = K D_0^{\frac{1}{2}}, \quad K = \left(\frac{\bar{\partial}_0 \Delta \bar{d}_{s0}}{C_{f0} \bar{F}_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

である。

次に、式(23)～(26)に式(28)を代入すると、式(30)～(33)を得る。

$$K \left(i\lambda D_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{1 - C_T} \bar{\beta}_0 C_{f0} D_0^{-\frac{1}{2}} \right) \hat{U}_1 + i\lambda \hat{H}_1 + \bar{\beta}_0 C_{f0} K^2 \left(\frac{C_D}{1 - C_T} - D_0^{-1} \right) \hat{D}_1 = 0 \quad (30)$$

$$K \left(i\lambda D_0^{\frac{1}{2}} + \bar{\beta}_0 C_{f0} D_0^{-\frac{1}{2}} \right) \hat{V}_1 + \frac{1}{2} \pi \hat{H}_1 = 0 \quad (31)$$

$$-\frac{1}{2} \pi \hat{V}_1 + i\lambda \hat{U}_1 + i\lambda K D_0^{-\frac{1}{2}} \hat{D}_1 = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial (\bar{F}_0^2 \hat{H}_1 - \hat{D}_1)}{\partial t} + \bar{Q}_0 \phi_0 \left\{ i\lambda \left[\frac{2\Phi_T}{K(1 - C_T)} D_0^{-\frac{1}{2}} \hat{U}_1 + \left(\frac{C_D}{1 - C_T} \Phi_T + \Phi_D \right) \hat{D}_1 \right] - \frac{1}{2} \pi \left[\frac{1}{K D_0^{\frac{1}{2}}} \hat{V}_1 - \frac{1}{2} \pi \frac{r}{\beta_0 \partial_0} (\bar{F}_0^2 \hat{H}_1 - \hat{D}_1) \right] \right\} + \frac{1}{1 - P} \left[-\frac{1}{2} \pi \frac{1}{W_f} C_{b0} X \hat{V}_1 + \left(\frac{1}{W_f} C_{b0} X + K D_0^{\frac{1}{2}} K_{1U} \right) i\lambda \hat{U}_1 + (C_{b0} + K D_0^{\frac{1}{2}} K_{1D}) i\lambda \hat{D}_1 + (-C_{b0} X + K D_0^{\frac{1}{2}} K_{1H}) \bar{F}_0^2 i\lambda \hat{H}_1 \right] \quad (33)$$

ここで、

$$\Phi_T = \frac{\partial_0}{\phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial g} \Big|_{g=g_0}, \quad \Phi_D = \frac{D_0}{\phi_0} \frac{\partial \phi}{\partial D} \Big|_{D=D_0}, \quad X = 1 - \exp\{-W_f(1 - a_v)\}$$

$$K_{1U} = \frac{J_{1u}}{j_1} \{\exp(j_1) - \exp(a_v j_1)\} + \frac{J_{2u}}{j_2} \{\exp(j_2) - \exp(a_v j_2)\} + \frac{j_{0u}}{W_f} X$$

$$K_{1H} = \frac{J_{1h}}{j_1} \{\exp(j_1) - \exp(a_v j_1)\} + \frac{J_{2h}}{j_2} \{\exp(j_2) - \exp(a_v j_2)\}$$

$$K_{1D} = \frac{J_{1d}}{j_1} \{\exp(j_1) - \exp(a_v j_1)\} + \frac{J_{2d}}{j_2} \{\exp(j_2) - \exp(a_v j_2)\} + \frac{j_{0d}}{W_f} X$$

である。

式(30)～(32)から、 $\hat{U}_1, \hat{V}_1, \hat{H}_1$ を $\hat{D}_1$ で表し、式(33)に代入すると、式(34)が得られる。

$$\frac{\partial \hat{D}_1}{\partial t} + G(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{\vartheta}_0, D_0, \lambda) \hat{D}_1 = 0 \quad (34)$$

なお、 $G(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{\vartheta}_0, D_0, \lambda)$ は、式(35)で表される。

$$\begin{aligned} G(\bar{d}_{s0}, \bar{\beta}_0, \bar{\vartheta}_0, D_0, \lambda) = & \frac{\bar{F}_0^2}{\bar{F}_0^2 f_H - 1} \frac{\partial f_H}{\partial t} \\ & \frac{\bar{Q}_0 \phi_0}{\bar{F}_0^2 f_H - 1} \left\{ i\lambda \left[\frac{2\Phi_T}{K(1-C_T)} D_0^{-\frac{1}{2}} f_U + \left(\frac{C_D}{1-C_T} \Phi_T + \Phi_D \right) \right] - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \pi \left[\frac{1}{KD_0^{\frac{1}{2}}} f_V - \frac{1}{2} \pi \frac{r}{\bar{\beta}_0 \bar{\vartheta}_0} (\bar{F}_0^2 f_H - 1) \right] \right\} + \frac{1}{\bar{F}_0^2 f_H - 1} \times \\ & \frac{1}{1-P} \left[-\frac{1}{2} \pi \frac{1}{W_f} C_{b0} X f_V + \left(\frac{1}{W_f} C_{b0} X + KD_0^{\frac{1}{2}} K_{1U} \right) i\lambda f_U + \right. \\ & \left. (C_{b0} + KD_0^{\frac{1}{2}} K_{1D}) i\lambda + (-C_{b0} X + KD_0^{\frac{1}{2}} K_{1H}) \bar{F}_0^2 i\lambda f_H \right] \quad (35) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_U = & -\frac{iK(-4ia_1\lambda^2 + a_2\pi^2 + a_3)}{(a_1a_4 + ia_3)D_0^{\frac{1}{2}}} & a_1 = (C_T - 1)\lambda D_0 \\ & & a_2 = \bar{\beta}_0 c_{f0}(-3 + C_T + C_D D_0) \\ f_V = & \frac{2K\pi\lambda(a_2 + ia_1)}{(a_1a_4 + ia_3)D_0^{\frac{1}{2}}} & a_3 = 2\bar{\beta}_0 c_{f0}\{\pi^2 - 2(C_T - 1)\lambda^2\} \\ & & a_4 = \pi^2 + 4\lambda^2 \\ f_H = & -\frac{4K^3\lambda(\bar{\beta}_0 c_{f0} + i\lambda D_0)(a_2 + ia_1)}{(a_1a_4 + ia_3)D_0} \end{aligned}$$

である。